Interpolation, et Courbes de Bézier

Yves Capdeboscq

Stage de seconde à l'UFR

Première partie

Interpolation

Soit f une fonction d'une variable (réelle), c'est à dire un objet qui associe à la valeur x la valeur $f(x)$, qu'on note d'habitude y. Elle donne une valeur de y pour chaque x. Depuis la troisième, vous connaissez les fonctions affines

$$f : x \to ax + b$$

Si je ne donne qu'une paire (x, y), (par exemple $(2, 5)$) il est facile de trouver plein de fonctions telles que $f(x) = y$ (c'est à dire $f(2) = 5$). Par exemple, la fonction constante $x \to 5$. Mais $x \to 15 - 5x$ marche aussi. Beaucoup d'autres...la plus simple est la fonction constante.

Si on me donne deux paires, $(2, 5)$ et $(3, 8)$, je peux trouver une fonction affine telle que $f(2) = 5$ et $f((3) = 8$. Supposons qu'une telle fonction existe, et soient a et b les deux coefficients tels que $f : x \to ax + b$. Alors on a

$$\begin{aligned} 5 &= 2a + b, \\ 8 &= 3a + b, \end{aligned}$$

En soustrayant on trouve $a = 3$, puis $b = -1$. On vérifie que $f(x) = 3x - 1$ satisfait bien ce que nous voulions.

De même si on se donne les paires $(1, 3)$ et $(2, 5)$, on essaye

$$\begin{aligned} 3 &= a + b \\ 5 &= 2a + b, \end{aligned}$$

et on trouve $a = 2$, $b = 1$, et la fonction $f : x \to 2x + 1$ passe bien par ces deux points.

Si on écrit cela en notant (x_1, y_1) le premier couple et (x_2, y_2) le second, on a envie d'écrire la proposition suivante.

Proposition 1. *Étant donné deux couples de points (x_1, y_1) et (x_2, y_2), il existe une unique fonction affine $f$telle que $f(x_1) = y_1$ et $f(x_2) = y_2$.*

En fait, cette proposition n'est pas tout à fait juste (donc elle est fausse). Il faut supposer $x_1 \neq x_2$.

Proposition 2. *Étant donné deux couples de points (x_1, y_1) et (x_2, y_2), avec $x_1 \neq x_2$, il existe une unique fonction affine $f$telle que $f(x_1) = y_1$ et $f(x_2) = y_2$.*

Démonstration. On peut faire comme tout à l'heure avec $(2, 5)$ et $(3, 8)$, mais en utilisant les symboles abstrait (x_1, y_1) et (x_2, y_2). Ou bien on peut dire : une fonction affine, ça s'écrit aussi , $a(x - x_1) + c$ au lieu de $ax + b$: il suffit de choisir $c = b + ax_1$ pour passer d'une écriture à l'autre. Dans ce cas, on trouve $c = y_1$, et puis $a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$. On trouve qu'on utilise bien que $x_2 \neq x_1$. $\square$

Et avec trois points ? Clairement, sauf cas particulier, une fonction affine ne suffit pas. Il faut sans doute un polynôme de degré 2, c'est à dire une fonction de la forme $f(x) = ax^2 + bx + c$.

Exemple : on se donne les trois paires, $(1, 3)$, $(2, 5)$, $(3, 8)$ et on écrit le système

$$
\begin{aligned}
3 &= a + b + c \\
5 &= 4a + 2b + c \\
8 &= 9a + 3b + c
\end{aligned}
$$

on peut résoudre, comme vous avez appris [1] avec le pivot de Gauss,

$$
L_1\text{pivot}\begin{cases} 3 & = a + b + c \\ 5 - 3 \times 4 & = 0 - 2b - 3c \\ 8 - 3 \times 9 & = 0 - 6b - 8c \end{cases}
$$

$$
L_1\text{pivot}\begin{cases} 3 & = a + b + c \\ 7 & = 0 + 2b + 3c \\ 19 & = 0 + 6b + 8c \end{cases}
$$

$$
L_2\text{pivot}\begin{cases} 3 - \frac{1}{2}7 & = a + 0 - \frac{1}{2}c \\ 7 & = 0 + 2b + 3c \\ 19 - 21 & = 0 + 0 - c \end{cases}
$$

$$
L_2\text{pivot}\begin{cases} \frac{1}{2} & = a \\ \frac{1}{2} & = b \\ 2 & = c \end{cases}
$$

donc on a trouvé ce polynôme,

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x + 2 \\
f(1) &= 3 \\
f(2) &= 5 \\
f(3) &= 8.
\end{aligned}
$$

Et en général ? À nouveau, on se rappelle que pour si (x, y) sont des points sur le graphe d'une fonction, alors on ne peut pas avoir deux valeurs de y différentes pour le même x. Donc le résultat serait

1. Avec Mathieu Merle, vous avez appris (ou revu pour certains) comment résoudre des systèmes linéaires avec le pivot de Gauss.

Proposition 3. *Etant donné x_1, x_2, x_3 deux à deux distincts, il existe un unique polynôme P degré inférieur ou égal à 2, tel que $P(x_1) = y_1$, $P(x_2) = y_2$ et $P(x_3) = y_3$.*

Démonstration. On peut refaire ce qu'on a fait avec l'exemple, en replaçant les nombres par x_1, x_2, x_3 et y_1, y_2, y_3 et vérifier que ce système a bien une solution unique (et pas aucune solution, ou une infinité de solution) si $x_1 \neq x_2$, $x_2 \neq x_3$, et $x_1 \neq x_3$.

Mais on peut aussi le faire autrement, en reprenant ce que nous avions fait déjà pour (x_1, y_1) et (x_2, y_2) :

$$y_1 + \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

passe déjà par les deux premiers points. On pourrait rajouter quelquechose, à savoir : un polynôme qui : vaut zéro en x_1 et vaut zéro en x_2, ce qui ne change rien aux deux premiers points, multiplié par quelquechose pour que ça donne bien ce qu'il faut en x_2.

$$y_1 + \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) + \alpha (x - x_1)(x - x_2)$$

En x_3, cela donne

$$y_3 = y_1 + \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x_3 - x_1) + \alpha (x_3 - x_1)(x_3 - x_2),$$

c'est à dire

$$\alpha = \frac{\frac{y_3 - y_1}{x_3 - x_1} - \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}}{x_3 - x_2}.$$

On remarque une structure sur ce α... en tout cas on a trouvé un polynôme, et on a calculé tous ses coefficients.

Mais on peut aussi le faire autrement. Dans la dernière méthode, on a introduit un polynôme du second degré qui s'annule en x_1 et x_2. Est-ce qu'on pourrait faire en sorte qu'il soit égal à 1 en x_3 ? Autrement dit, peut-on choisir un α tel que

$$\alpha (x - x_1)(x - x_2)$$

soit égal à 1 en x_3 ? Oui, ça donne

$$\frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)} =: P^{x_3}_{[x_1, x_2, x_3]}$$

Ce polynôme est très pratique. On peut introduire ses deux compagnons

$$\frac{(x - x_1)(x - x_3)}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)} =: P^{x_2}_{[x_1,x_2,x_3]} \text{ et } \frac{(x - x_2)(x - x_3)}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)} =: P^{x_1}_{[x_1,x_2,x_3]}$$

Sous cette forme, on a tout simplement que le polynôme de degré 2 tel que $P(x_1) = y_1$, $P(x_2) = y_2$ et $P(x_3) = y_3$ est

$$P(x) = y_1 P^{x_1}_{[x_1,x_2,x_3]} + y_2 P^{x_2}_{[x_1,x_2,x_3]} + y_3 P^{x_3}_{[x_1,x_2,x_3]}.$$

Remarque : c'est presque une preuve, mais pas tout à fait, il faudrait aussi être sur qu'il n'y a qu'une seule façon d'écrire les polynômes du second degré sous cette forme. □

Exercice 4. Vérifier qu'on retrouve bien le polynôme voulu pour $(1, 3)$, $(2, 5)$, $(3, 8)$.

Maintenant qu'on a construit ces polynômes, on sait aussi comment montrer le résultat pour un nombre quelconque de points ?

Oui...

Définition 5. Étant donné $x_1, \cdots, x_N$, N valeurs deux à deux distinctes, on appelle polynôme d'interpolation de Lagrange les N polynomes

$$\begin{aligned}
P^{x_1}_{[x_1,\cdots,x_N]} &:= \frac{(x - x_2)\cdots(x - x_N)}{(x_1 - x_2)\cdots(x_1 - x_N)}\\
&\vdots\\
P^{x_1}_{[x_1,\cdots,x_N]} &:= \frac{(x - x_2)\cdots(x - x_{i-1})(x - x_{i+1})\cdots(x - x_N)}{(x_i - x_2)\cdots(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})\cdots(x_i - x_N)}\\
&\vdots\\
P^{x_1}_{[x_1,\cdots,x_N]} &:= \frac{(x - x_1)\cdots(x - x_{N-1})}{(x_N - x_1)\cdots(x_N - x_{N-1})}.
\end{aligned}$$

Exercice 6. Question bonus : et l'approche numéro 2, que devient-elle ?

Réponse : On a $P_N = a_0 + a_1 (x - x_1) + \cdots + a_N (x - x_1)\cdots(x - x_N)$ et on veut trouver the coefficient de a_N pour que $P_N(x_{n+1}) = y_{n+1}$

Alors on fait

$$P_{N+1} = P_N + \alpha (x - x_1)\cdots(x - x_N),$$

et ainsi

$$\alpha = \frac{y_{N+1} - P_N(x_{N+1})}{(x_{N+1} - x_1)\cdots(x_{N+1} - x_N)}$$

En fait on peut montrer que $\alpha_N = [y_1, \cdots, y_N]$ où

$$\begin{aligned}
[y_k] &= y_k \\
[y_k, y_{k+1}] &= \frac{[y_{k+1}] - [y_k]}{x_{k+1} - x_k} \\
[y_k, y_{k+1}, y_{k+2}] &= \frac{[y_{k+1}, y_{k+2}] - [y_k, y_{k+1}]}{x_{k+2} - x_k} \\
[y_k, y_{k+1}, y_{k+2}, y_{k+2}] &= \frac{[y_{k+1}, y_{k+2}, y_{k+3}] - [y_k, y_{k+1}, y_{k+2}]}{x_{k+2} - x_k}
\end{aligned}$$

etc.

Proposition 7. *Étant donné $x_1, \cdots, x_N$, N valeurs deux à deux distinctes, et $y_1, \cdots, y_N$ l'unique polynôme de degré plus petit ou égal à N tel que pour tout $i \in \{1, \cdots, N\}$ on ait $P(x_i) = y_i$ est donné par*

$$P(x) = y_1 P^{x_1}_{[x_1, \cdots, x_N]} + y_2 P^{x_2}_{[x_1, \cdots, x_N]} + \cdots + y_N P^{x_N}_{[x_1, \cdots, x_N]}.$$

Exemple 8. Avec les trois points $(1, 3)$, $(2, 5)$, $(3, 5)$

Les deux parties linéaires sont $y = 2x + 1$ et $y = 5$
La solution quadratique est

$$\frac{3}{2}(x-2)(x-3) - 5(x-1)(x-3) + \frac{5}{2}(x-1)(x-2) = -x^2 + 5x - 1$$

Dans le premier exemple, la solution est "mieux" : c'est pareil, mais plus lisse. Dans le deuxième exemple, c'est moins clair : tout dépend à quoi ressemble la vraie fonction !

A quoi ça sert ? Ben comme ça, plutôt que garder toutes les valeurs de la fonctions en plein de points, on a une jolie forme bien ronde.

Et si on se posait la question autrement ? Autrement dit, si on se disait : j'ai des points donnés, et je voudrais une jolie forme bien arrondie ? Et puis, si possible, pourrais-je faire dessins qui ne sont pas des graphes de fonctions ?

Deuxième partie

Courbes de Bézier et Algorithme de Casteljau

Interlude : Paul de Faget de Casteljau (1930-2022) et Pierre Bézier (1910-1999).

Cette partie n'étant pas mathématiques, elle n'est pas reproduite ici. Vous pouvez lire par exemple : https://afmicado.com/actualite/a-personal-tribute-to-paul-de-faget-de-casteljau (en anglais).

Les courbes dites de Bézier

Prenons une forme, dans le plan. Étant donné deux points, A_0, A_1, on peut définir une courbe paramétrée qui passe par ces deux points : $M(t) = tA_1 + (1-t)\,A_0$ avec $t \in [0,1]$. Par exemple, pour les points $A_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $A_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$, cela donne

$$M(t) = \begin{pmatrix} 2t + (1-t)\,1 \\ 5t + (1-t)\,3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix},$$

le segment de droite passant par $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ et de vecteur directeur $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, que nous avons trouvé avant ($y = 2x + 1$).

On peut de la même façon définir de segment entre les points $A_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ et $A_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \end{pmatrix}$: ça devient

$$\begin{aligned} N(t) &= tA_2 + (1-t)\,A_1, t \in [0,1]\,, \\ &= \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Comment coller ensemble ces deux segments ? on les concatène.

Définition 9. Soit $C\,[A_0, A_1]\,(t)$ une courbe paramétrée par $t \in [0,1]$ entre A_0 et A_1 et $C\,[A_1, A_2]\,(t)$ une courbe paramétrée par $t \in [0,1]$ entre A_1 et A_2 . Alors

$$C\,[A_0, A_1, A_2]\,(t) = \begin{cases} C\,[A_0, A_1]\,(2t) & \text{pour } 0 \le t < \frac{1}{2} \\ C\,[A_1, A_2]\,(2t-1) & \text{pour } \frac{1}{2} \le t < 1 \end{cases}$$

est la concaténation des deux courbes. C'est une courbe paramétrée qui passe par A_0, A_1 et A_2.

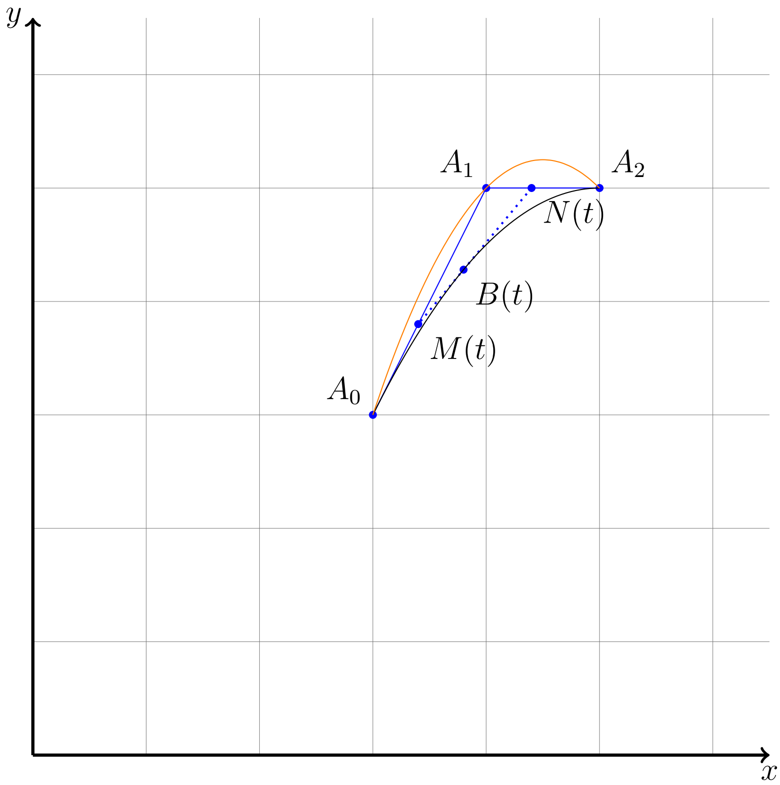

FIGURE 0.0.1 – Une image d'un autre exemple, où les trois points sont $\begin{pmatrix}3\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}4\\5\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}5\\5\end{pmatrix}$. Lagrange en orange. Une illustration des courbes de Bézier d'ordre 2 (à trois points).

Pour trouver une courbe plus jolie que ces deux segments de droite, on construit un mélange entre les deux segments

$$\begin{aligned}
B(t) &= tN(t) + (1-t)\,M(t) \\
&= t\left(\begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}\right) + (1-t)\left(\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\right) \\
&= \begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}2-1+1\\5-3+2\end{pmatrix} + t^2\begin{pmatrix}1-1\\3-2\end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix} + t^2\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix},
\end{aligned}$$

autrement dit, $x = 2t+1, t = 3+4t+t^2$, ou encore $y = 3+4\left(\frac{x-1}{2}\right)+\left(\frac{x-1}{2}\right)^2 = \frac{5}{4} + \frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{2}x$. Cette parabole est tangente aux deux droites,

Définition 10. Qui se sert des courbes de Bézier d'ordre 2 : vous, à chaque fois que vous utilisez une police de caractère TrueType : elle n'est pas pixelisée, mais calculée à partir des courbes de Bézier d'ordre 2.

En regardant le dessin ci-dessus, on remarque que la courbe est tangente en R1 et en P0 aux droite (P0M1) et (M1R1). Autrement dit, si on ne voulait pas des courbes, mais juste de lignes brisées, on trouverait de cette façon facilement quelles droite choisir pour avoir des segments de droite tangents à la "bonne courbe", la courbe de Bézier :

- À l'échelle la moins fine, on prend les deux segments P_0P_1 et P_1P_2.
- À l'échelle suivant on prend $P_0M((\frac{1}{2})$et $M\left(\frac{1}{2}\right)R\left(\frac{1}{2}\right)$ d'une part, et $R\left(\frac{1}{2}\right)N\left(\frac{1}{2}\right)$ et $N\left(\frac{1}{2}\right)P_2$ d'autre part, où $R\left(\frac{1}{2}\right)$ est le mlieu du segment $M\left(\frac{1}{2}\right)N\left(\frac{1}{2}\right)$, et on recommence.

En répétant ça plusieurs fois, on trouve rapidement une excellente approximation de la courbe de Bézier par des segments de droite.